DS n°7 (sujet A)
Correction

Exercice 1 : Choix de la forme (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 6x - 16$$

1) $$\begin{aligned}(x+3)^2 - 25 &= (x^2 + 2\times3\times x + 9) - 25 \\ &= x^2 + 6x + 9 - 25 \\ &= x^2 + 6x - 16 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x-2)(x+8) &= x^2 + 8x - 2x - 16 \\ &= x^2 + 6x - 16 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

2) A : forme développée
B : forme canonique
C : forme factorisée

3)

a) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer :

	Forme A	Forme B	Forme C
$f(0)$	X		
$f(-3)$		X	

b) Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre :

	Forme A	Forme B	Forme C
$f(x) = 0$			X
$f(x) = -16$	X		

c) Si on considère la courbe représentative Cf de la fonction f dans le plan, muni d'un repère, déterminer la forme qui permet de trouver le plus simplement :

	Forme A	Forme B	Forme C
Les points d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses			X
Le point d'intersection de Cf avec l'axe des ordonnées	X		

4) a) Pour déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole représentative de la fonction f on utilise la forme canonique.

$f(x) = (x+3)^2 - 25 = \left(x-(-3)\right)^2 + (-25)$

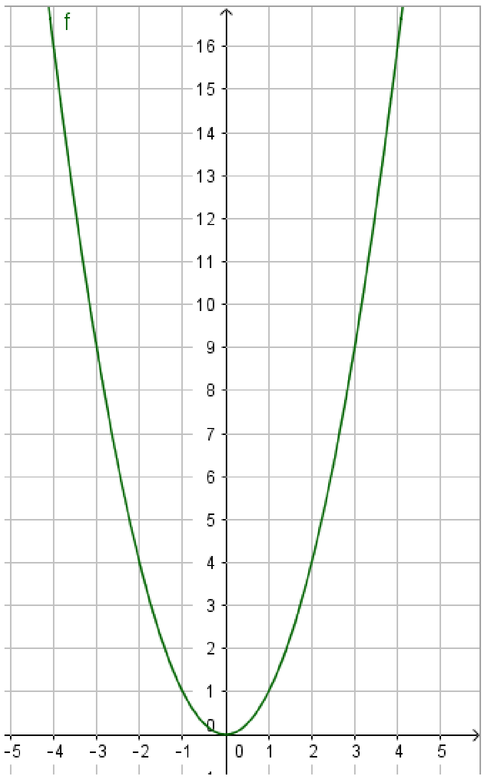
Les coordonnées du sommet sont donc S(-3 ;-25).

b)

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-25	$\nearrow$	

Exercice 2 : La fonction carré (4 points)

1) Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.



2)

a) $a = \sqrt{5}$; $b = 2$

$a > b$. La fonction carré est croissante sur $[0\,;+\infty[$, donc $a^2 > b^2$

b) $a = -\frac{1}{4}$; $b = -0{,}33$

$a > b$. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$, donc $a^2 < b^2$

3) $(3x+2)^2 = 9 \Leftrightarrow 3x+2 = -3$ ou $3x+2 = 3$

$\Leftrightarrow 3x = -3-2 = -5$ ou $3x = 3-2 = 1$

$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{3}$ ou $x = \frac{1}{3}$

$S = \left\{-\frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right\}$

4)

a) Si $-4 \leq x \leq 3$ alors $x^2 \in [0; 16]$

b) Si $-3 \leq x < -1$ alors $x^2 \in]1; 9]$

5) Si $2 \leq x^2 \leq 10$ alors $x \in \left[-\sqrt{10}; -\sqrt{2}\right] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{10}]$

Exercice 3 : (2 points)

$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$

$\Leftrightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} x_v - x_u \\ y_v - y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 5-(-3) \end{pmatrix}$

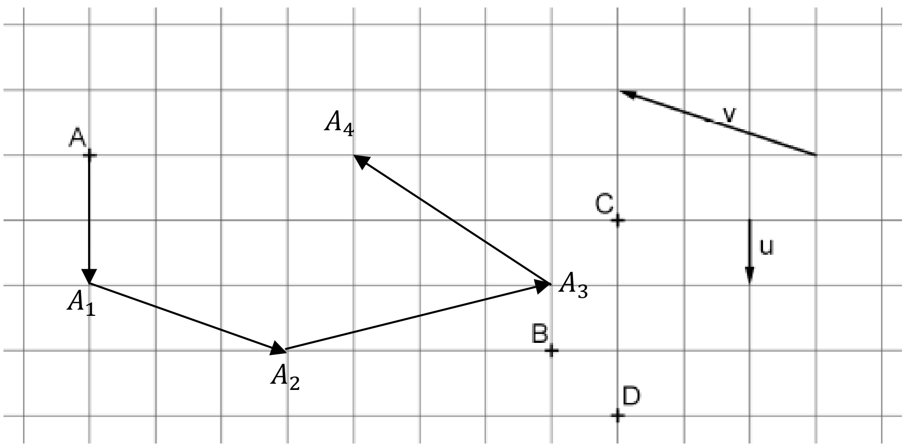
$\Leftrightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

$\vec{u} - \vec{m} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{m} = \vec{u} - \vec{v}$

$\Leftrightarrow \vec{m}\begin{pmatrix} x_u - x_v \\ y_u - y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-(-1) \\ -3-5 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \vec{m}\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$

Exercice 4 : (3 points)



Exercice 5 : (5 points)

1) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-3 \\ 0-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-5 \\ \frac{19}{5} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{14}{5} \end{pmatrix}$

$-5 \times \frac{14}{5} = -14$ et $-7 \times 2 = -14$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) Soit M$(x_m ; y_M)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ -7 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix} x_C - x_M \\ y_C - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - x_M \\ 1 - y_M \end{pmatrix}$

On veut $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$ soit $\begin{cases} 5 - x_M = -5 \\ 1 - y_M = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 10 \\ y_M = 8 \end{cases}$

Donc M(10 ;8)

3) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$ donc ABCM est un parallélogramme.

Exercice Bonus : (2 points)

Soit M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC}$.

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\
&= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\
&= -\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} \\
&= 2\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} \\
&= 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= 2\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}
$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les droites (MN) et (AC) sont parallèles.

DS n°7 (sujet B)
Correction

Exercice 1 : Choix de la forme (6 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 + 4x - 21$$

1) $$\begin{aligned}(x-3)(x+7) &= x^2 + 7x - 3x - 21 \\ &= x^2 + 4x - 21 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

   $$\begin{aligned}(x+2)^2 - 25 &= (x^2 + 2\times 2\times x + 4) - 25 \\ &= x^2 + 4x + 4 - 25 \\ &= x^2 + 4x - 21 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

2) A : forme développée
   B : forme factorisée
   C : forme canonique

3)

   a) Choisir la forme la plus adaptée pour calculer :

	Forme A	Forme B	Forme C
$f(-7)$		X	
$f(0)$	X		

   b) Choisir la forme la plus adaptée pour résoudre :

	Forme A	Forme B	Forme C
$f(x) = 0$		X	
$f(x) = -21$	X		

   c) Si on considère la courbe représentative Cf de la fonction f dans le plan, muni d'un repère, déterminer la forme qui permet de trouver le plus simplement :

	Forme A	Forme B	Forme C
Les points d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses		X	
Le point d'intersection de Cf avec l'axe des ordonnées	X		

4) a) Pour déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole représentative de la fonction f on utilise la forme canonique.

$$f(x) = (x+2)^2 - 25 = \left(x-(-2)\right)^2 + (-25)$$

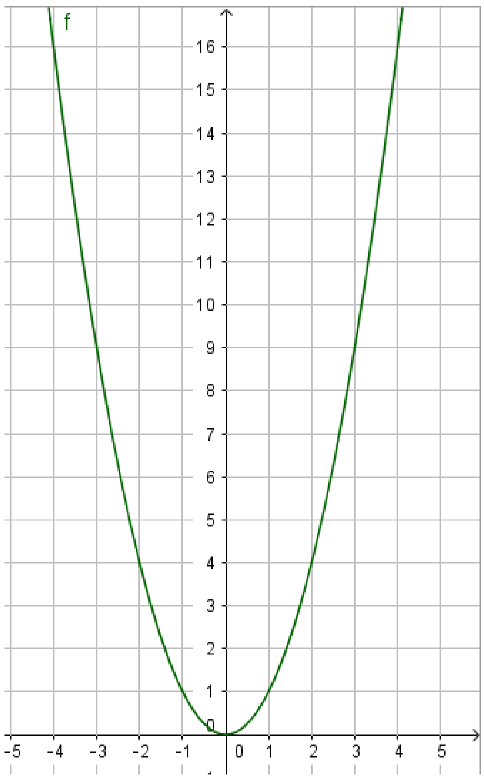
Les coordonnées du sommet sont donc S(-2 ;-25).

b)

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	-25	$\nearrow$	

Exercice 2 : La fonction carré (4 points)

1) Tracer dans le repère ci-dessous la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.



2)

c) $a = -\sqrt{5}$; $b = -2$

$a < b$. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty; 0]$, donc $a^2 > b^2$

d) $a = \frac{1}{4}$; $b = 0{,}33$

$a < b$. La fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$, donc $a^2 < b^2$

3) $(2x-5)^2 = 3 \Leftrightarrow 2x-5 = -\sqrt{3}$ ou $2x-5=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow 2x = -\sqrt{3}+5$ ou $2x = \sqrt{3}+5$

$\Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{3}+5}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{3}+5}{2}$

$$S = \left\{\frac{-\sqrt{3}+5}{2}; \frac{\sqrt{3}+5}{2}\right\}$$

4)

c) Si $-3 \leq x \leq 5$ alors $x^2 \in [0; 25]$

d) Si $-4 \leq x < -2$ alors $x^2 \in]4; 16]$

5) Si $2 \leq x^2 \leq 8$ alors $x \in [-\sqrt{8}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{8}]$

Exercice 3 : (2 points)

$\vec{u} + \vec{w} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{v} - \vec{u}$

$$\Leftrightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} x_v - x_u \\ y_v - y_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5-3 \\ 1-(-2) \end{pmatrix}$$

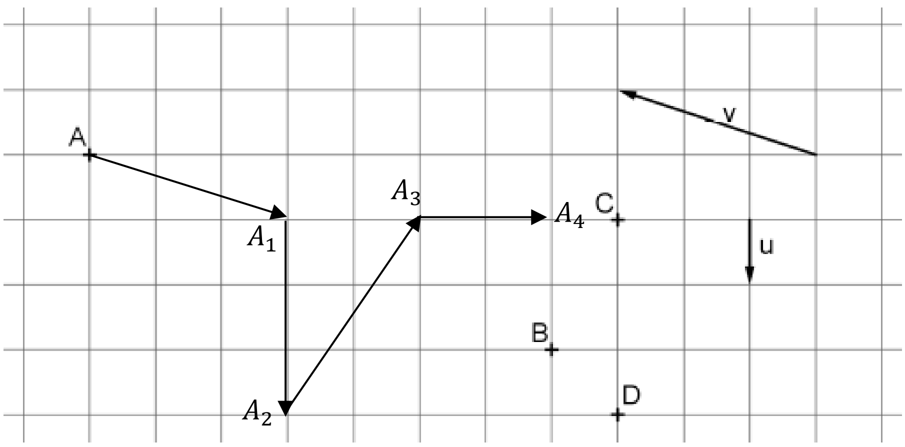
$$\Leftrightarrow \vec{w}\begin{pmatrix} -8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\vec{u} - \vec{m} = \vec{v} \Leftrightarrow \vec{m} = \vec{u} - \vec{v}$

$$\Leftrightarrow \vec{m}\begin{pmatrix} x_u - x_v \\ y_u - y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-(-5) \\ -2-1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \vec{m}\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : (3 points)



Exercice 5 : (5 points)

4) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 2-(-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{5} - 4 \\ 1-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 3 \end{pmatrix}$

$-5\times 3 = -15$ et $9\times\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{36}{5}$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ne sont pas colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) ne sont pas parallèles.

5) Soit M$(x_m ; y_M)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 9 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{MC}\begin{pmatrix} x_C - x_M \\ y_C - y_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - x_M \\ -2 - y_M \end{pmatrix}$

On veut $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$ soit $\begin{cases} 4 - x_M = -3 \\ -2 - y_M = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 7 \\ y_M = -11 \end{cases}$

Donc M(7 ;-11)

6) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$ donc ABCM est un parallélogramme.

Exercice Bonus : (2 points)

Soit M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ et N tel que $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\ &= -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} \\ &= -3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - 4\overrightarrow{AC} \\ &= \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AC} \\ &= -3\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc les droites (MN) et (AC) sont parallèles.