DM n°13

Vous rédigerez vos réponses **<u>au propre</u>** sur une feuille.

<u>Problème</u>

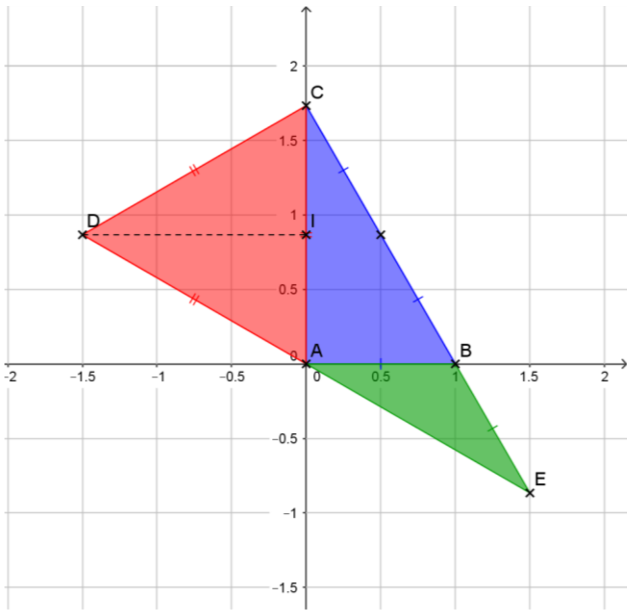
Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $BC = 2AB$.

On construit le triangle équilatéral ADC extérieur à ABC, ainsi que le triangle ABE isocèle en B extérieur à ABC tel que E, B, C soient alignés. ***(Les triangles ne doivent pas se superposer).***

1) Faire une figure **<u>codée</u>**
2) Comment sont placés les points D, A et E ?

Corrigé

1)



2) On conjecture, à l'aide de la figure, que les points D, A et E sont alignés. Démontrons cette conjecture :

   On place les points dans un repère orthonormé, tel que A(0 ; 0) et B(1 ; 0).
   Calculons alors les coordonnées des points C, D et E.

Calcul des coordonnées du point C :

ABC est un triangle rectangle en A, donc d'après le théorème de Pythagore :
$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow AC^2 = BC^2 - AB^2$

Or d'après l'énoncé, $BC = 2AB$ et $AB = 1$ donc $BC = 2$, d'où :
$AC^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$ soit $\boxed{AC = \sqrt{3}}$

On en déduit alors les coordonnées du point $\boxed{C(0; \sqrt{3})}$

Calcul des coordonnées du point D :

Notons les coordonnées de $D(x_D; y_D)$
Le triangle ACD est équilatéral. Appelons I le milieu de [AC]. Alors (DI) est la médiatrice de ACD issue de D, donc par définition, (DI) est perpendiculaire à (AC).
Donc l'ordonnée de D est la même que celle de I.
I est milieu de [AC], donc $I\left(0\,; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d'où $y_D = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
De plus, le triangle AID est rectangle en I, donc d'après le théorème de Pythagore :
$AD^2 = AI^2 + ID^2 \Leftrightarrow ID^2 = AD^2 - AI^2$

Or d'après l'énoncé, ADC est équilatéral, donc $AD = AC$ et $AC = \sqrt{3}$ donc $AD = \sqrt{3}$
Et $AI = \frac{AC}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$ID^2 = \sqrt{3}^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ soit $\boxed{ID = \frac{3}{2}}$

On en déduit alors les coordonnées du point $\boxed{D\left(-\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

Calcul des coordonnées du point E :

D'après l'énoncé, le triangle ABE est isocèle en B, donc $BE = AB$.
Or $BC = 2AB$, donc $BC = 2BE$

De plus, les points C, B et E sont alignés donc les vecteurs $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BE}$ sont colinéaires et on a : $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BE}$

$$\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} x_B - x_C \\ y_B - y_C \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 1 - 0 \\ 0 - \sqrt{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x_E - 1 \\ y_E - 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x_E - 1 \\ y_E \end{pmatrix}$$

Or $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{BE}$, donc :

$$\begin{cases} 1 = 2(x_E - 1) \\ -\sqrt{3} = 2y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2x_E - 2 \\ -\sqrt{3} = 2y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 2 = 2x_E \\ -\sqrt{3} = 2y_E \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} = x_E \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} = y_E \end{cases}$$

Donc les coordonnées de E sont $\boxed{E\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$

Démonstration de l’alignement des point D, A et E :

Les points D, A et E sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D - x_A \\ y_D - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} - 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DA}\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} x_E - x_A \\ y_E - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} - 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} - 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

On remarque alors que $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont colinéaires, donc <u>les points D, A et E sont alignés.</u>