Correction
DM n°14

Exercice 53 p 188 :

(AB) : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-8-7}{10-(-20)} = \frac{-15}{30} = -0{,}5$

$b = y_A - ax_A = 7 - (-0{,}5)\times(-20) = 7 - 10 = -3$

$\boxed{\text{(AB)} : y = -0{,}5x - 3}$

(CD) : $a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-4-11}{-10-20} = \frac{-15}{-30} = 0{,}5$

$b = y_C - ax_C = 11 - 0{,}5\times 20 = 11 - 10 = 1$

$\boxed{\text{(CD)} : y = 0{,}5x + 1}$

$0{,}5 \neq -0{,}5$ donc les droites (AB) et (CD) sont sécantes. Déterminons leur point d'intersection I.

$$\begin{cases} y = -0{,}5x - 3 \\ y = 0{,}5x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -0{,}5x - 3 \\ -0{,}5x - 3 = 0{,}5x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -0{,}5x - 3 \\ -x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -0{,}5x - 3 \\ x = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -0{,}5\times(-4) - 3 = -1 \\ x = -4 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Donc I}(-4\,;-1)}$

Exercice 54 p 189 :

1) (CD)//(AB) donc les droites ont le même coefficient directeur.

(CD) : $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1-(-3)}{2-0} = \frac{4}{2} = 2$

$b = y_C - ax_C = 4 - 2\times 0 = 4$

$\boxed{\text{(CD)} : y = 2x + 4}$

D est sur l'axe des abscisses donc $y_D = 0$.

D appartient à (CD) donc $y_D = 2x_D + 4 \Leftrightarrow 0 = 2x_D + 4 \Leftrightarrow -4 = 2x_D \Leftrightarrow x_D = -2$

$\boxed{\text{Donc D}(-2\,;0)}$

2) ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 0-(-2) \\ 4-0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est bien un parallélogramme.

Exercice 60 p 189 :

1) a) (BC) : $a = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-1-5}{6-3} = \frac{-6}{3} = -2$

$$b = y_B - ax_B = 5 - (-2)\times 3 = 5 + 6 = 11$$

$\boxed{\text{(BC) : } y = -2x + 11}$

(PQ)//(AB). Or $y_B = y_A$ donc la droite (AB) est parallèle à l'axe des abscisses. Ainsi la droite (PQ) l'est aussi, et passe par le point P(3 ;1), donc :

$\boxed{\text{(PQ) : } y = 1}$

b) Q appartient à (PQ) donc $y_Q = 1$.

De plus Q appartient à (BC) donc $y_Q = -2x_Q + 11 \Leftrightarrow 1 = -2x_Q + 11 \Leftrightarrow -10 = -2x_Q \Leftrightarrow x_Q = 5$

$\boxed{\text{Donc Q(5 ;1)}}$

2) a) (DC) : $a = \frac{y_C - y_D}{x_C - x_D} = \frac{-1-2}{6-(-6)} = \frac{-3}{12} = -0{,}25$

$$b = y_C - ax_C = -1 - (-0{,}25)\times 6 = -1 + 1{,}5 = 0{,}5$$

$\boxed{\text{(DC) : } y = -0{,}25x + 0{,}5}$

(PR)//(AD) donc les droites ont le même coefficient directeur.

(PR) : $a = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{2-5}{-6-(-3)} = \frac{-3}{-3} = 1$

$$b = y_P - ax_P = 1 - 1\times 3 = -2$$

$\boxed{\text{(PR) : } y = x - 2}$

b) R est le point d'intersection de (DC) et (PR)

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -0{,}25x + 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x - 2 = -0{,}25x + 0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ 1{,}25x = 2{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 2 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Donc R(2 ;0).

3) (BD) : $a = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{2-5}{-6-3} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$

(QR) : $a = \frac{y_R - y_Q}{x_R - x_Q} = \frac{0-1}{2-5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

Donc (BD) et (QR) sont parallèles.

4) a) (AC) : $a = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1-5}{6-(-3)} = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}$

$$b = y_A - ax_A = 5 - \left(-\frac{2}{3}\right) \times (-3) = 5 - 2 = 3$$

(AC) : $y = -\frac{2}{3}x + 3$

$$-\frac{2}{3}x_P + 3 = -\frac{2}{3} \times 3 + 3 = -2 + 3 = 1 = y_P$$

Donc P appartient à la droite (AC).

b) On se place dans le triangle (BCD). Q ∈ (BC) et R ∈ (CD). D'après le théorème de Thalès, (BD)//(QR) si $\frac{CR}{CD} = \frac{CQ}{CB}$

$$CR = \sqrt{(x_R - x_C)^2 + (y_R - y_C)^2} = \sqrt{(2-6)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{(-4)^2 + (1)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$CD = \sqrt{(x_D - x_C)^2 + (y_D - y_C)^2} = \sqrt{(-6-6)^2 + (2-(-1))^2} = \sqrt{(-12)^2 + (3)^2} = \sqrt{144+9} = \sqrt{153}$$

$$\frac{CR}{CD} = \sqrt{\frac{17}{153}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$$CQ = \sqrt{\left(x_Q - x_C\right)^2 + \left(y_Q - y_C\right)^2} = \sqrt{(5-6)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(3-6)^2 + (5-(-1))^2} = \sqrt{(-3)^2 + (6)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45}$$

$$\frac{CQ}{CB} = \sqrt{\frac{5}{45}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$$

$\frac{CR}{CD} = \frac{CQ}{CB}$ donc les droites (BD) et (QR) sont parallèles.

On retrouve bien les résultats précédents.