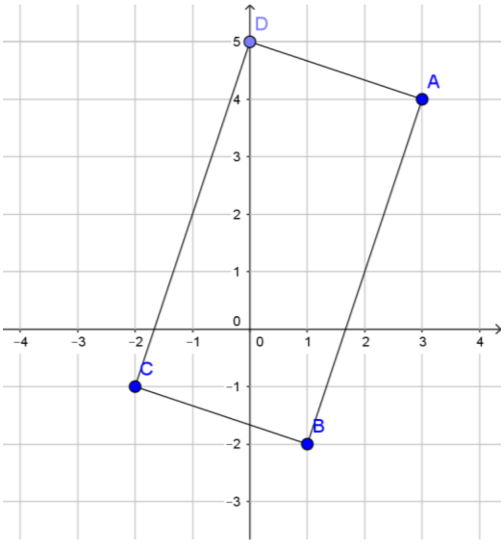
Correction
DS n°8 (sujet A)

Exercice 1 : (4 points)

1)



2) a) ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) Notons $D(x\,;y)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-3 \\ -2-4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -2-x \\ -1-y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -2 - x \\ -6 = -1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + 2 = 0 \\ y = -1 + 6 = 5 \end{cases}$$

Donc D(0 ;5)

c) Graphiquement, nous voyons bien que D a pour coordonnées (0 ;5).

Exercice 2 : **(4 points)**

1) a) $x \in [1; 2{,}5] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2{,}5$

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle]0 ; +∞[, donc :

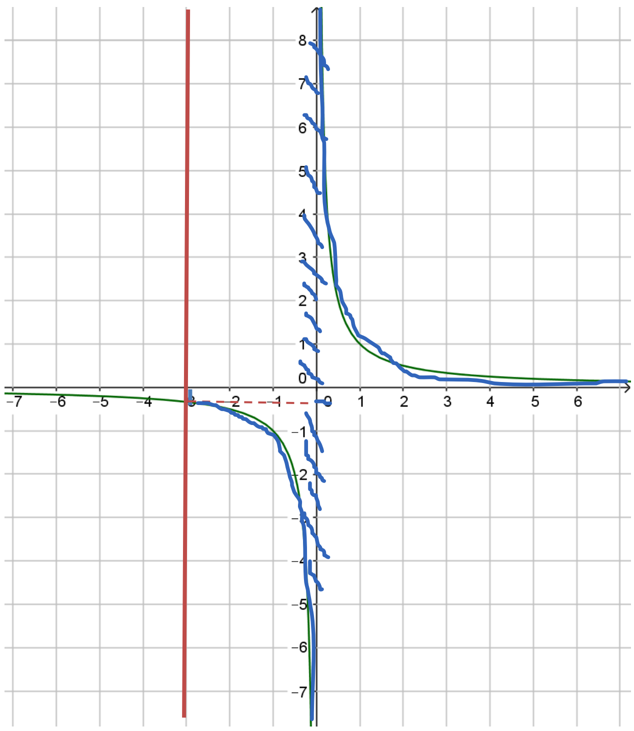
$$1 \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{2{,}5}$$

b) $x \in]-3; -1] \Leftrightarrow -3 < x \leq -1$

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle]-∞ ; 0[, donc :

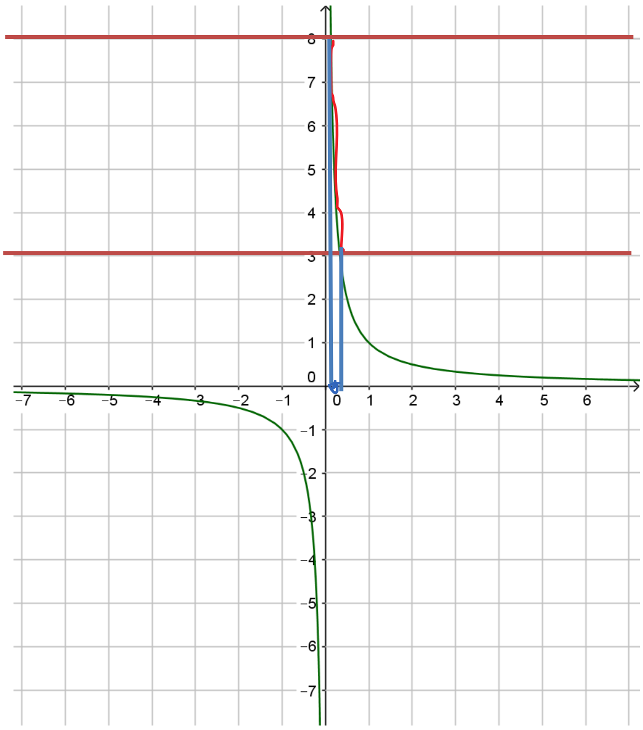
$$-\frac{1}{3} > \frac{1}{x} \geq -1$$

c) $x > -3$



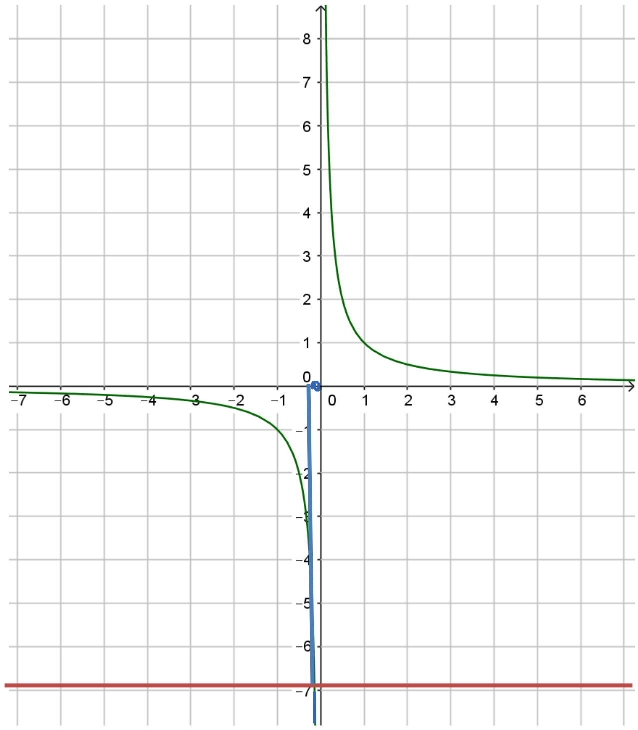
Alors $\frac{1}{x} \in \left]-\infty; -\frac{1}{3}\right[\cup]0; +\infty[$

2) a) $3 \leq \frac{1}{x} \leq 8$



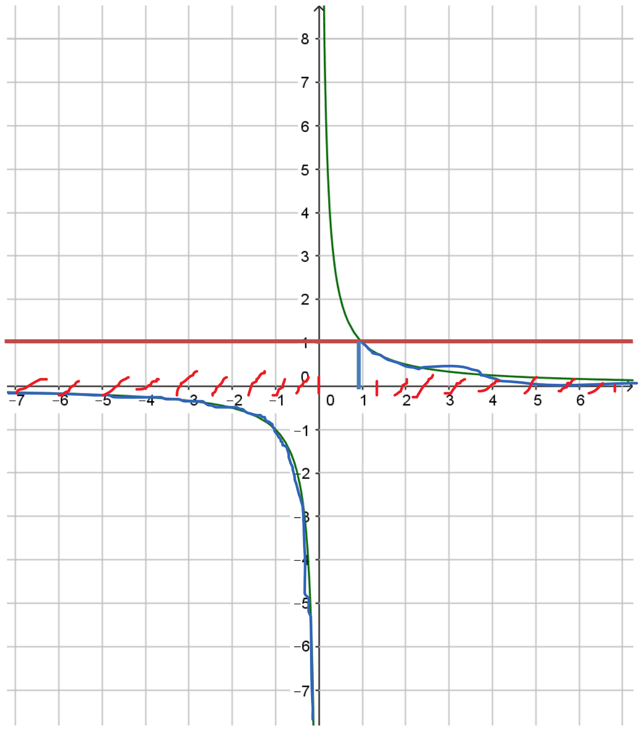
Alors $\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{x} < -7$



Alors $x \in \left]-\frac{1}{7}; 0\right[$

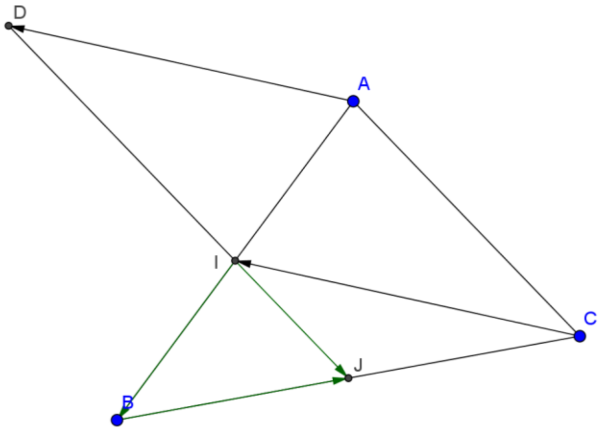
c) $\frac{1}{x} \leq 1$



Alors $x \in \ ]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$

Exercice 3 : (6 points)

1) 2)



3) a) Montrons que $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BJ}$

Or I est milieu de [AB] et J milieu de [BC], donc :

$\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

b) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ donc :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

4) a) D est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CI}$, donc $\overrightarrow{CI} = \overrightarrow{AD}$, donc le quadrilatère ADIC est un parallélogramme.

b) ADIC est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DI}$.

5) D'après la question 3b) on a $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, et d'après la question 4b) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DI}$, donc :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DI}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DI}$ sont colinéaires, donc les points D, I et J sont alignés.

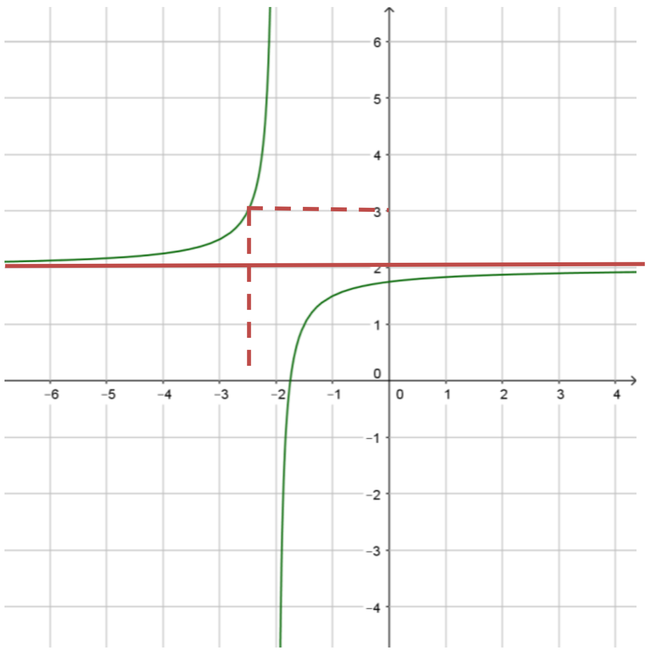
Exercice 4 : (6 points)

1) $f(x) = 2 - \frac{1}{2x+4} = \frac{2(2x+4)}{2x+4} - \frac{1}{2x+4} = \frac{4x+8-1}{2x+4} = \frac{4x+7}{2x+4}$

$a = 4\,; b = 7\,; c = 2\ et\ d = 4$

f est donc bien une fonction homographique, définie pour tout réel x tel que $2x + 4 \neq 0$, soit $x \neq -2$.

f est donc définie sur $]-\infty; -2[\cup]-2; +\infty[$



2) La droite $y = 2$ n'a aucun point en commun avec la courbe représentative de f.

3) $f(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{4x+7}{2x+4} = 3$

$$\Leftrightarrow 4x + 7 = 3(2x + 4)$$
$$\Leftrightarrow 4x + 7 = 6x + 12$$
$$\Leftrightarrow 2x = -5$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$$

Graphiquement, on retrouve bien cette valeur.

4) a) Voici le tableau de variations de f :

x	-∞		-2		+∞
$f(x)$		↗	‖	↗	

b) $x \in [-1; 2] \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 2$

La fonction f est croissante sur l'intervalle]-2 ;+∞[, donc

$f(-1) \leq f(x) \leq f(2)$

$$f(-1) = \frac{4\times(-1) + 7}{2\times(-1) + 4} = \frac{-4 + 7}{-2 + 4} = \frac{3}{2}$$

$$f(2) = \frac{4\times 2 + 7}{2\times 2 + 4} = \frac{8 + 7}{4 + 4} = \frac{15}{8}$$

Donc $\frac{3}{2} \leq f(x) \leq \frac{15}{8}$

5) $g(x) = x + \frac{7}{4}$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{4x + 7}{2x + 4} = x + \frac{7}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{4x + 7}{2x + 4} = \frac{4x + 7}{4}$$
$$\Leftrightarrow 4(4x + 7) = (2x + 4)(4x + 7)$$
$$\Leftrightarrow 4(4x + 7) - (2x + 4)(4x + 7) = 0$$
$$\Leftrightarrow (4x + 7)[4 - (2x + 4)] = 0$$
$$\Leftrightarrow (4x + 7)[-2x] = 0$$
$$\Leftrightarrow 4x + 7 = 0 \quad ou \quad -2x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{7}{4} \quad ou \;\; x = 0$$

$$S = \left\{-\frac{7}{4}; 0\right\}$$

Exercice Bonus : **(+2 points)**

On veut : $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

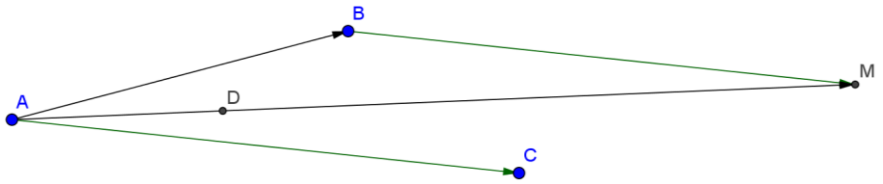
$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA}+\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$ d'après la relation de Chasles

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

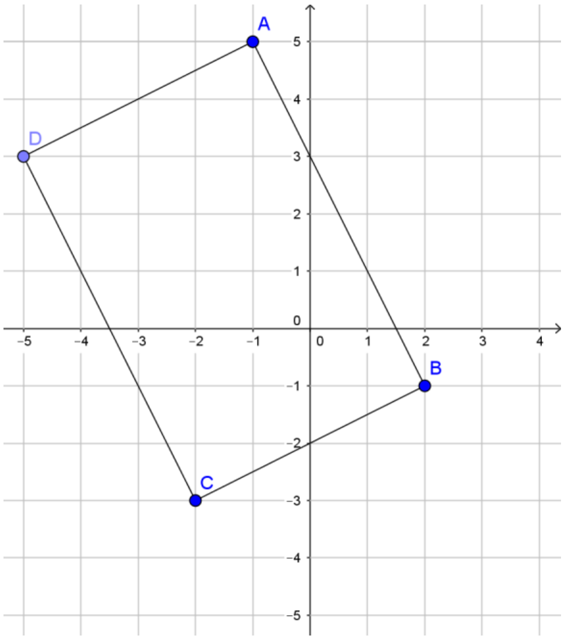
On construit alors le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, puis on place le point D tel que $AD=\frac{1}{4}AM$



Correction
DS n°8 (sujet B)

<u>Exercice 1 :</u> (4 points)

1)



2) a) ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

b) Notons $D(x\,;y)$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2-(-1) \\ -1-5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C - x_D \\ y_C - y_D \end{pmatrix} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} -2-x \\ -3-y \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = -2 - x \\ -6 = -3 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - 3 = -5 \\ y = -3 + 6 = 3 \end{cases}$$

Donc D(-5 ;3)

c) Graphiquement, nous voyons bien que D a pour coordonnées (-5 ;3).

<u>Exercice 2 :</u> (4 points)

1) a) $x \in [3; 5,5] \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 5,5$

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle]0 ; +∞[, donc :

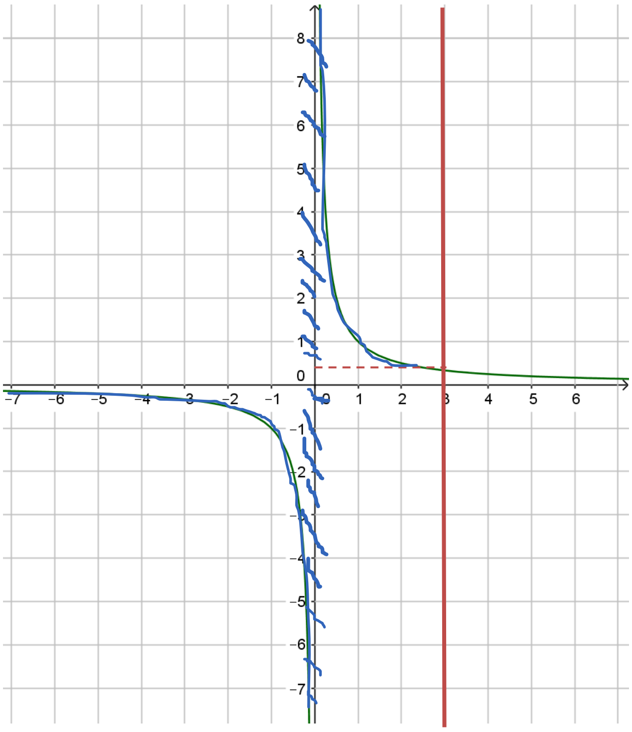
$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{5,5}$$

b) $x \in [-4; -3[\Leftrightarrow -4 \leq x < -3$

La fonction inverse est décroissante sur l'intervalle]-∞ ; 0[, donc :

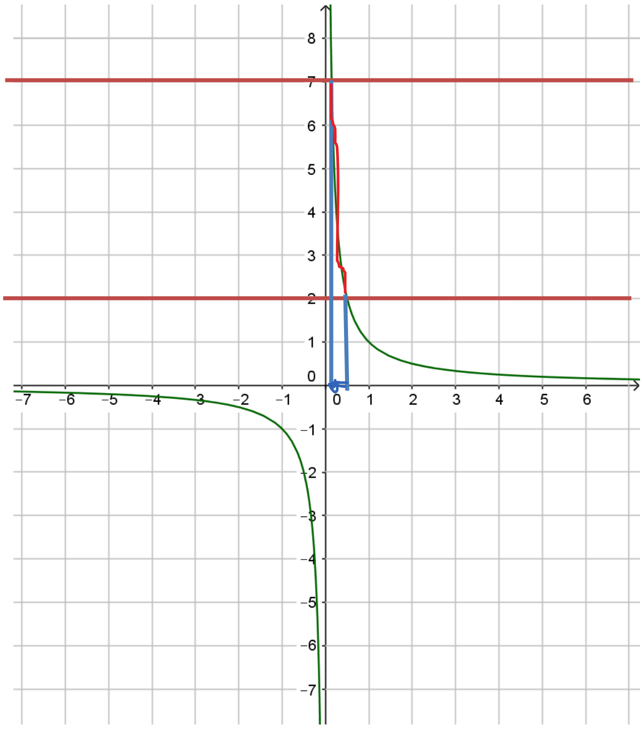
$$-\frac{1}{4} \geq \frac{1}{x} > -\frac{1}{3}$$

c) $x \leq 3$



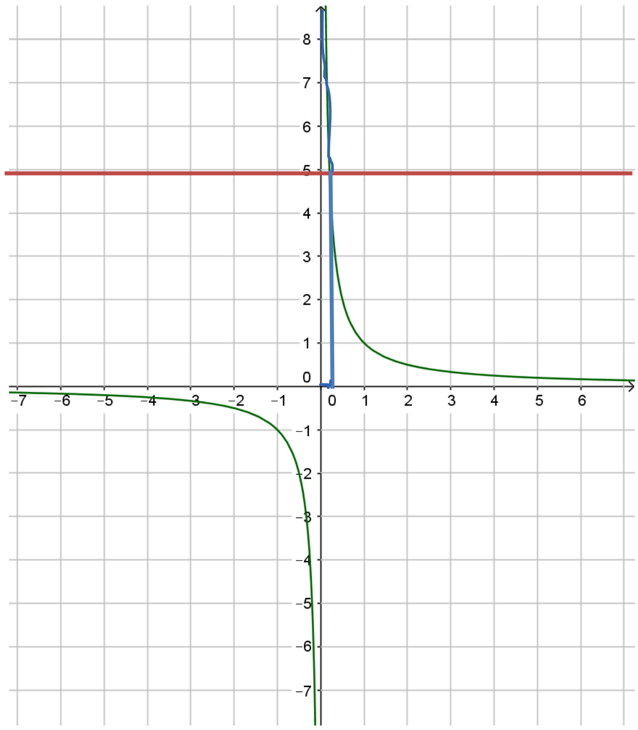
Alors $\frac{1}{x} \in \ ]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{3}\ ; +\infty[$

2) a) $2 \leq \frac{1}{x} \leq 7$



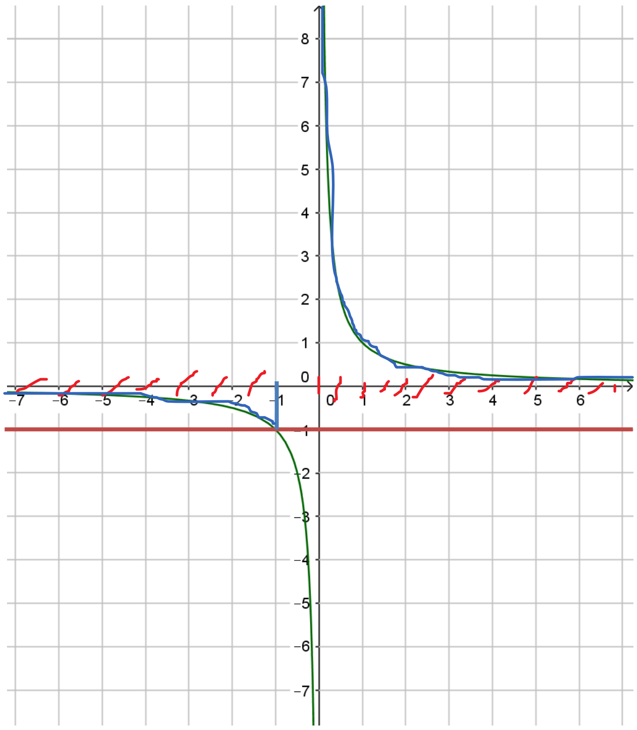
Alors $\frac{1}{7} \leq x \leq \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{x} > 5$



Alors $x \in \left]0; \frac{1}{5}\right[$

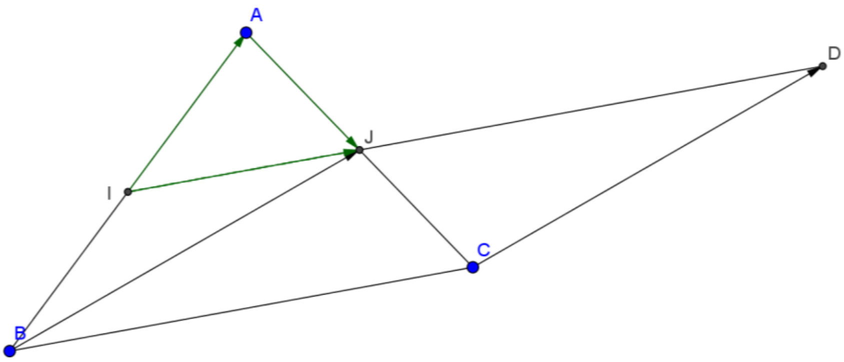
c) $\frac{1}{x} > -1$



Alors $x \in \left]-\infty; -1\right[\cup \left]0; +\infty\right[$

Exercice 3 : (6 points)

1) 2)



3) a) Montrons que $\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$

Or I est milieu de [AB] et J milieu de [AC], donc :

$\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$

b) D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$ donc :

$$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

4) a) D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{BJ}$, donc $\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{CD}$, donc le quadrilatère BCDJ est un parallélogramme.

b) BCDJ est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{JD}$.

5) D'après la question 3b) on a $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, et d'après la question 4b) $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{JD}$, donc :

$$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{JD}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JD}$ sont colinéaires, donc les points D, I et J sont alignés.

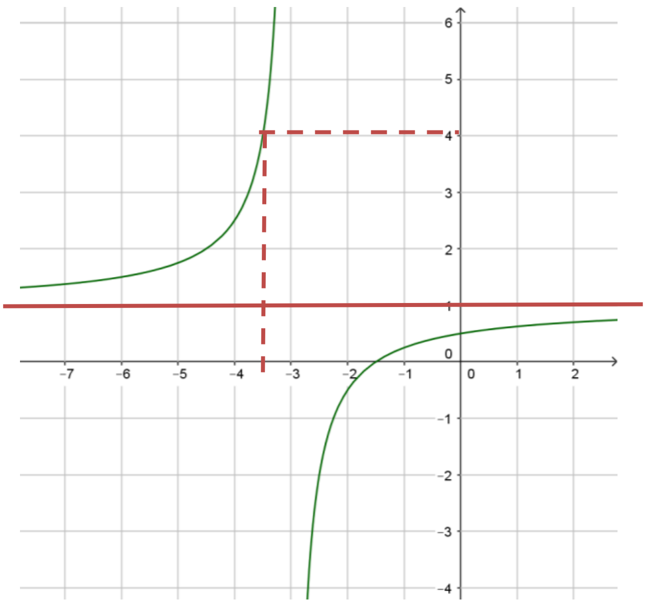
Exercice 4 : (6 points)

1) $f(x)=1-\frac{3}{2x+6}=\frac{1(2x+6)}{2x+6}-\frac{3}{2x+6}=\frac{2x+6-3}{2x+6}=\frac{2x+3}{2x+6}$

$a=2\,;b=3\,;c=2\ et\ d=6$

f est donc bien une fonction homographique, définie pour tout réel x tel que $2x+6\neq 0$, soit $x\neq -3$.

f est donc définie sur $]-\infty;-3[\cup]-3;+\infty[$



2) La droite $y = 1$ n'a aucun point en commun avec la courbe représentative de f.

3) $f(x) = 4 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{2x+6} = 4$

$$\Leftrightarrow 2x + 3 = 4(2x + 6)$$
$$\Leftrightarrow 2x + 3 = 8x + 24$$
$$\Leftrightarrow 6x = -21$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{21}{6} = -\frac{7}{2}$$

Graphiquement, on retrouve bien cette valeur.

4) a) Voici le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

b) $x \in [-7; -4] \Leftrightarrow -7 \leq x \leq -4$

La fonction f est croissante sur l'intervalle]-∞ ;-3[, donc

$f(-7) \leq f(x) \leq f(-4)$

$$f(-7) = \frac{2\times(-7)+3}{2\times(-7)+6} = \frac{-14+3}{-14+6} = \frac{-11}{-8} = \frac{11}{8}$$

$$f(-4) = \frac{2\times(-4)+3}{2\times(-4)+6} = \frac{-8+3}{-8+6} = \frac{-5}{-2} = \frac{5}{2}$$

Donc $\frac{11}{8} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$

5) $g(x) = x + \frac{3}{2}$.

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{2x+3}{2x+6} = x + \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{2x+6} = \frac{2x+3}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2(2x+3) = (2x+6)(2x+3)$$
$$\Leftrightarrow 2(2x+3) - (2x+6)(2x+3) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x+3)[2 - (2x+6)] = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x+3)[-2x-4] = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x + 3 = 0 \quad ou \quad -2x - 4 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \quad ou \ \ x = 2$$

$$S = \left\{-2; -\frac{3}{2}\right\}$$

Exercice Bonus : **(+2 points)**

On veut : $2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DA}+\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$ d'après la relation de Chasles

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

On construit alors le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, puis on place le point D tel que $AD=\frac{1}{4}AM$