Nom : 2°11
Prénom : 03/02/2017

Module 3 : Solution approchée

<u>**Objectifs mathématiques**</u> :

- Déterminer une solution approchée d'une équation du type $f(x) = k$.
- Découvrir la méthode de balayage.
- Découvrir l'algorithme de dichotomie.
- Comprendre un algorithme donné.

1. Prérequis

1. Donner l'amplitude de l'intervalle [5 ; 9] : **9-5 = 4** , puis donner son centre : $\frac{5+9}{2} = 7$

   Même question avec l'intervalle [1,724 ; 1,865]. Amplitude : **1,724-1,865 = 0,141**,

   centre : $\frac{1{,}724+1{,}865}{2} = 1{,}7945$

2. Nombres ayant des signes différents :

   Deux réels non nuls a et b ont des signes différents si et seulement si $a \times b < 0$

2. Etude du problème

Problème :

Une entreprise va fabriquer des millions de briques de jus fruits en carton.

Elles doivent se présenter sous forme de pavés droits à base carrée, et de hauteur égale à trois fois le côté de la base. Le volume désiré est 2 litres.

L'objectif est de déterminer les dimensions de ces briques au centième de millimètre près pour le réglage des machines de fabrication.

On note x le côté du carré de base, exprimé en dm :

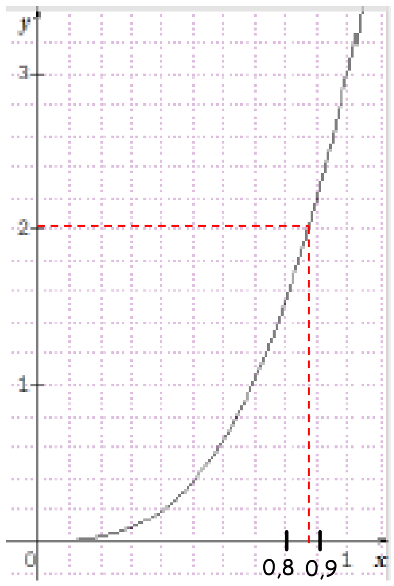
1. Calculer le volume de la boîte en fonction de x, on le notera $f(x)$:

$$\boxed{f(x) = 3x^3}$$

Pour trouver les dimensions des briques, il faut résoudre l'équation $f(x) =$ **2** , où x est un réel positif.

On admet que cette équation a une seule et unique solution, que l'on notera S. S n'est pas un nombre entier, ni même une fraction, on va se contenter de trouver une valeur approchée de la solution, respectant la précision désirée.

Résultats admis : f est une fonction croissante sur [0 ; +∞[, de plus, on peut tracer sa représentation graphique sans lever le crayon.



2. Calculer $f(1)$: $f(1) = \mathbf{3 \times 1^3 = 3}$
3. S est-il plus grand ou plus petit que 1 ? (rappel : l'unité est le dm.) **S est plus petit que 1.**
4. A l'aide du graphique, donner un encadrement de S d'amplitude 0,1 : $\boxed{S \in [\mathbf{0,8} ; \mathbf{0,9}]}$

✋ *Appeler le professeur.*

3. 1ère méthode : le balayage

1. Du tableau de valeurs ci-dessous, quel encadrement déduit-on pour S ? $\boxed{S \in [\mathbf{0,87} ; \mathbf{0,88}]}$

   Quelle est la précision obtenue ? **0,88-0,87 = 0,01**

x	0,8	0,81	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	**0,87**	**0,88**	0,89	0,9
f(x)	1,54	1,59	1,65	1,72	1,78	1,84	1,91	**1,98**	**2,04**	2,11	2,19

2. Réaliser un tableau de valeurs de $f(x)$ sur l'intervalle trouvé au 1, avec un pas de 0,001.

x	0,87	0,871	0,872	**0,873**	**0,874**	0,875	0,876	0,877	0,878	0,879	0,88
f(x)	1,98	1,982	1,989	**1,996**	**2,003**	-	-	-	-	-	-

Quel encadrement de S trouve-t-on ? $\boxed{S \in [\mathbf{0,873} ; \mathbf{0,874}]}$

Quelle est la précision obtenue ? **0,874-0,873 = 0,001**

3. Poursuivre la méthode pour donner un encadrement à 10^{-4}près de S.

x	0,873	0,8731	0,8732	0,8733	0,8734	**0,8735**	**0,8736**	0,8737	0,8738	0,8739	0,874
$f(x)$	1,996	1,997	1,9974	1,998	1,9988	**1,9994**	**2,0001**	-	-	-	-

$$\boxed{S \in [\mathbf{0,8735} ; \mathbf{0,8736}]}$$

Au total, combien de calculs d'images ont été nécessaires ? **21**

✋ *Appeler le professeur.*

4. 2ème méthode : la dichotomie

On va encadrer le nombre S dans des intervalles de plus en plus précis, en les recoupant à chaque fois en deux, d'où le nom de **dichotomie**.

Au départ, S est dans l'intervalle $[a\,;\,b]$, avec $a = 0{,}8$ et $b = 0{,}9$.

1. Le centre de l'intervalle $[a\,;\,b]$ est : $m = \frac{0{,}8+0{,}9}{2} = \mathbf{0,85}$

   (réponse en fonction de a et b, puis réponse décimale)

   $f(m) = \mathbf{3 \times 0,85^3 \approx 1,84}$, $f(a) = \mathbf{3 \times 0,8^3 = 1,536}$

S est donc plus **grand** que m. (compléter avec « petit » ou « grand »)

On peut donc donner un encadrement plus précis de S en remplaçant l'un des nombres a ou b par m, lequel ? **On remplace a par m.**

On recommence plusieurs fois le même procédé pour obtenir des encadrements de plus en plus précis de S.

2. Compléter le tableau suivant. Vous pouvez entrer la fonction $f(x)$ dans la calculatrice et utiliser la TABLE.

Nom : 2°11
Prénom : 03/02/2017

N° étape	a	b	m	$f(m)$	Compléter avec $<$ ou $>$	Compléter avec a ou b	Nouvel intervalle	Amplitude de l'intervalle
1	0,8	0,9	0,85	1.84	$m < S$	Donc je remplace a par m	[0,85 ; 0,9]	0,05
2	0,85	0,9	**0,875**	**2,01**	$m > S$	Donc je remplace **b** par m	**[0,85 ; 0,875]**	**0,025**
3	**0,85**	**0,875**	**0,8625**	**1,92**	$m < S$	Donc je remplace **a** par m	**[0,8625 ; 0,875]**	**0,0125**
4	**0,8625**	**0,875**	**0,86875**	**1,967**	$m < S$	Donc je remplace **a** par m	**[0,86875 ; 0,875]**	**0,00625**
5	**0,86875**	**0,875**	**0,871875**	**1,988**	$m < S$	Donc je remplace **a** par m	**[0,871875 ; 0,875]**	**0,003125**

L'intervalle obtenu après la cinquième étape n'est pas encore assez précis, puisque son amplitude est supérieure à 0,001 (0,001 est la précision visée dans l'énoncé du problème). Il est temps d'automatiser les calculs à l'aide d'un programme suivant.

3. Compléter l'algorithme suivant :

```
Entrées : a, b, m, e
Demander a et b
Demander e
Tant que    b − a    > e
    Affecter m à la valeur    (a+b)/2
    Si f(m) <  2  , alors
        Affecter  a  à la valeur m
        Sinon
            Affecter  b  à la valeur m.
        Fin SINON
    Fin SI
Fin Tant que
Afficher    [a ; b]
```

4. Au bout de combien d'étapes obtient-on un encadrement à 10^{-4}près de S ? **10**
5. Comparer les deux méthodes.

La dichotomie est une méthode plus efficace car elle nous donne un encadrement à 10^{-4} près au bout de 10 étapes, tandis que le balayage demande 21 étapes de calculs pour avoir la même précision.